Frank Sandig
Agricolastr. 16, 2310A
09599 Freiberg

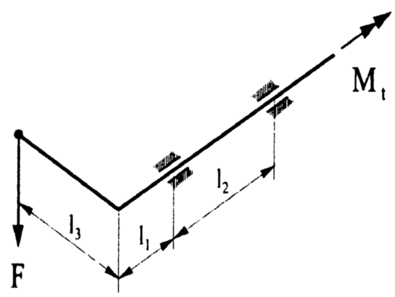
48127
4.WWT
sandigf@mailserver.tu-freiberg.de

Maschinen- und Apparateelemente

1. Belegaufgabe

Aufgabenstellung:

Der dargestellte Teil eines Verstellmechanismus (Welle und Hebelarm) wird am Ende des Hebelarmes über eine Gelenkverbindung mit der statischen Kraft F und am Ende der Welle mit dem entsprechenden Gegenmoment M_t belastet.
Ges.: Lagerkräfte, M_b- und M_t-Verlauf
Welche Querschnittsabmessungen sind für den Hebel (Rechteckquerschnitt mit dem Verhältnis h/b) und für die Welle (Kreisquerschnitt mit konstantem Durchmesser d) erforderlich, wenn an den gefährdeten Stellen die Sicherheit gegen Fließen S_F vorhanden sein soll?
Die Verbindung zwischen Hebel und Welle ist nicht näher zu betrachten.



Gegeben: (Aufg.-Nr. 2007/197)

l_1 = 220 mm
l_2 = 225 mm
l_3 = 250 mm
h/b = 2,5
F = 25 kN
S_F = 1.3
Werkstoff: St 50

Abgabezeitraum: 26.11. - 30.11.2007

Übungsleiter: Dr.-Ing. B. Hartmann

1. Lager- und Schnittreaktionen

Zur Bemessung der Querschnitte der Welle-Hebel-Konstruktion ist es zunächst erforderlich, die entscheidenden Auflager- und Schnittreaktionen zu bestimmen.

1.1 Biegemoment im Hebel

Für die Bemessung des Hebels, an dem die Kraft F angreift, ist das maximale Biegemoment $M_{b,max\ (Hebel)}$ interessant. Die Querkraft wird, auch im Folgenden bei der Bemessung der Welle, wie in den Beispielen des Seminars nicht gesondert betrachtet.

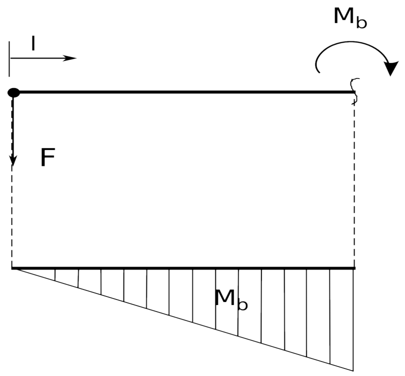


Abbildung 1: Schnitt; Momentenverlauf im Hebel

Für das Momentengleichgewicht um die Schnittstelle gilt:

$$M_b^{(Hebel)} - F \cdot l = 0 \quad \text{bzw.} \quad \boxed{M_b^{(Hebel)} = F \cdot l} \ . \qquad (1)$$

Da F konstant ist, liegt das maximale Biegemoment im Hebel beim maximalen Wert von l, also $l = l_3$ vor.

$$M_{bmax}^{(Hebel)} = F \cdot l_3 = 25\text{kN} \cdot 250\text{mm}$$

$$\underline{\underline{M_{bmax}^{(Hebel)} = 6250\text{Nm}}}$$

1.2 Lagerkräfte und Momente an der Welle

An der Welle treten an zwei Punkten (A, B) Lagerreaktionen auf. Für die Bemessung ist zu beachten, dass die Welle durch die Kraft F einerseits auf Biegung und andererseits über den Hebel der Länge l_3 auch auf Torsion belastet wird, also überlagerte Belastung vorliegt. Es sind demnach zwei Momentenverläufe zu bestimmen und die Stelle der größten Belastung zu ermitteln.

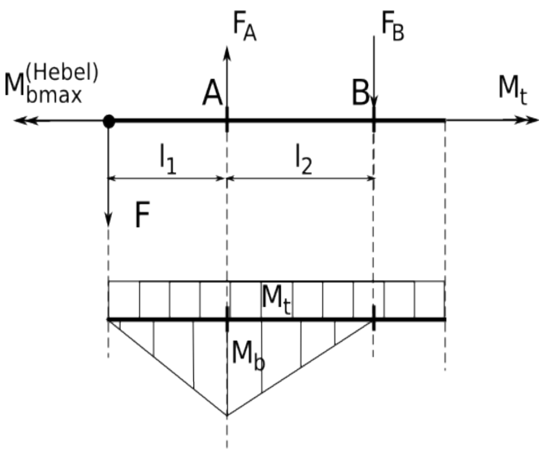


Abbildung 2: Kräfte, Momente. Größenverläufe an der Welle

Für das Torsionsmoment M_t gilt im Gleichgewicht:

$$M_t - M_{bmax}^{(Hebel)} = 0 \quad \text{also} \quad \boxed{M_t = M_{bmax}^{(Hebel)}} \qquad (2)$$

$$\underline{\underline{M_t = 6250\text{Nm}}} \ , \text{(vgl. Gleichung 1);}$$

folglich ist es über die gesamte Länge der Welle konstant (Abbildung 2, unten).

Die beiden Lagerkräfte F_A und F_B ergeben sich zum einen aus dem Kräftgleichgewicht in vertikaler Richtung.

$$\uparrow: \quad F_A - F - F_B = 0 \ , \quad \boxed{F_A = F + F_B} \qquad (3)$$

Die zweite Gleichung liefert das Momentengleichgewicht der Kräfte um den Lagerpunkt A:

$$M_{um.A}: \quad F \cdot l_1 - F_B \cdot l_2 = 0 \quad , \quad F_B = \frac{F \cdot l_1}{l_2} \quad ; \tag{4}$$

$$F_B = \frac{25\text{kN} \cdot 220\text{mm}}{225\text{mm}} \quad \underline{\underline{= 24{,}44\,kN}} \quad .$$

Damit berechnet sich die zweite Lagerkraft $F_A = (25 + 24{,}44)\,kN \quad \underline{\underline{= 49{,}44\,kN}}$.

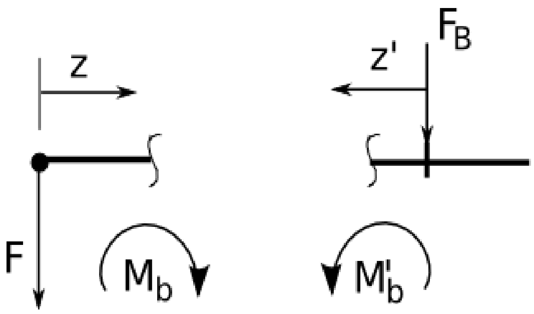


Abbildung 3: Schnitt; Biegemomentenverlauf in der Welle

Schneidet man die Welle zwischen der Verbindungsstelle mit dem Hebel und dem Lagerpunkt A (Koordinate z von links nach rechts), so gilt für das Biegemoment

$$M_b = F \cdot z \tag{5a}$$

und für einen Schnitt zwischen Lager B und Lager A (Koordinate z' von rechts nach links) gilt im Gleichgewicht

$$M_b' = F_B \cdot z' \quad . \tag{5b}$$

Es ergibt sich der in Abbildung 2 skizzierte Verlauf mit einem Maximum $M_{b,max}$ an der Stelle $z=l_1$ bzw $z'=l_2$, also am Lager A.
Das Biegemoment hat demnach den Maximalwert

$$M_{b,max} = F \cdot l_1 = 25\text{kN} \cdot 220\text{mm} \quad \underline{\underline{= 5500\text{Nm}}}$$

und verschwindet an den Stellen z=0 und z'=0.

2. Bemessung der Querschnitte

Im Folgenden werden aus den im Abschnitt 1 ermittelten Belastungen in den gefährdeten Querschnitten mit der geforderten Sicherheit die nötigen Querschnittsabmessungen bestimmt.

2.1 Querschnittsmaße des Hebels

Für die Bemessung des Hebels ist das Biegemoment M_b mit einem Maximum an der Stelle $l=l_3$ entscheidend, es gilt also für die Sicherheit gegen Fließen

$$S_{b,F} = \frac{Festigkeit}{Nennspannung} = \frac{\sigma_{bF}}{\sigma_b} \tag{6}$$

mit $$\sigma_b = \frac{M_{bmax}^{(Hebel)}}{W_b} \quad , \tag{7}$$

dabei ist für den einfachen Rechteckquerschnitt ohne Längskraftbelastung

$$W_b = \frac{b \cdot h^2}{6} \quad \text{bzw.} \quad W_b = \frac{h^3}{15} \quad , \tag{8}$$

da für das Verhältnis der Kantenlängen h,b des Rechteckquerschnitts h:b=25:10 gefordert ist.
In Gleichung 6 eingesetzt ist die Sicherheit

$$S_{b,F}=\frac{\sigma_{bF}\cdot h^3}{15\cdot M_{bmax}^{(Hebel)}} \quad . \tag{9}$$

Umstellen nach dem gesuchten Querschnittsmaß h führt auf

$$h=\sqrt[3]{\frac{15\cdot M_{bmax}^{(Hebel)}\cdot S_{b,F}}{\sigma_{bF}}} \quad . \tag{10}$$

Für den gegebenen Werkstoff St50 findet man für statische Biegebelastung den Wert $\sigma_{bF}=365\text{N/mm}^2$.
Setzt man nun die Festigkeit, die geforderte Sicherheit und das unter 1.1 ermittelte maximale Biegemoment im Hebel ein, erhält man

$$h=\sqrt[3]{\frac{15\cdot 6250\text{Nm}\cdot 1{,}3}{365\text{N}/mm^2}} \quad .$$

Damit erhält man für die nötige Querschnittshöhe h

$$\underline{\underline{h=69{,}38mm}}$$

und aus dem geforderten Verhältnis der Kantenlänge von h:b=25:10

$$\underline{\underline{b=27{,}75mm}} \quad .$$

Demnach könnte zum Beispiel ein Flachstahl nach DIN174 mit den lieferbaren Nennmaßen h=70mm und b=30mm eingesetzt werden.

2.2 Durchmesser der Welle

Die Welle wird durch das konstante Torsionsmoment M_t und durch das Biegemoment M_b belastet, wobei ein Maximum von M_b am Lagerpunkt A existiert. Es liegt demnach eine überlagerte Belastung vor, so dass für die Sicherheit gegen Fließen in der Welle gilt

$$\frac{1}{S_F}=\sqrt{\frac{1}{(S_{b,F})^2}+\frac{1}{(S_{t,F})^2}} \quad , \tag{11}$$

wobei $$S_{b,F}=\frac{Festigkeit}{Nennspannung}=\frac{\sigma_{bF}}{\sigma_b} \quad \text{und} \quad S_{t,F}=\frac{\tau_{tF}}{\tau_t} \quad , \qquad (12), \quad (13)$$

mit $$\sigma_b=\frac{M_{bmax}}{W_b} \quad \text{und} \quad \tau_t=\frac{M_t}{W_t} \quad . \qquad (14), \quad (15)$$

Weiter gilt für den Kreisquerschnitt ohne Längskraftbelastung

$$W_b=\frac{\pi\cdot d^3}{32} \quad \text{und} \quad W_t=\frac{\pi\cdot d^3}{16} \quad . \qquad (16), \quad (17)$$

Setzt man diese Beziehungen in die Ausgangsgleichung ein, so erhält man

$$\frac{1}{S_F}=\sqrt{\left(\frac{32\cdot M_{bmax}}{\pi d^3 \sigma_{bF}}\right)^2+\left(\frac{16\cdot M_t}{\pi d^3 \tau_{tF}}\right)^2} \quad , \tag{18}$$

stellt man nun nach d um, so ergibt sich für den erforderlichen Durchmesser d der Welle die Gleichung

$$d=\sqrt[6]{\frac{S_F^2}{\pi^2}\cdot\left[\left(\frac{32\cdot M_{bmax}}{\sigma_{bF}}\right)^2+\left(\frac{16\cdot M_t}{\tau_{tF}}\right)^2\right]} \quad . \tag{19}$$

Für die Biegefließfestigkeit gilt wie unter 2.1 der Tabellenwert σ_{bF}=365N/mm², für die Torsionsfließfestigkeit findet man den Wert τ_{tF}=180N/mm²; die Welle soll ebenfalls aus St50 hergestellt werden.
Setzt man nun diese Festigkeiten sowie die geforderte Gesamtsicherheit und die unter 1.2 ermittelten Belastungen der Welle ein, so erhält man

$$d=\sqrt[6]{\frac{(1{,}3)^2}{\pi^2}\cdot\left[\left(\frac{32\cdot 5500\text{Nm}}{370\text{N}/mm^2}\right)^2+\left(\frac{16\cdot 6250\text{Nm}}{180\text{N}/mm^2}\right)^2\right]}$$

und somit als notwendigen Durchmesser der Welle

$$\underline{\underline{d=67{,}14\,mm}} \quad .$$

Es könnte also beispielsweise für die Welle ein warmgewalzter Rundstahl DIN1013-1 oder ein blanker Rundstahl DIN670 mit einem Nenndurchmesser von 70mm gewählt werden (genormt sind Nenndurchmesser in dieser Größenordnung in Stufen zu 5mm).

3. Quellennachweis:

Fließfestigkeitswerte, Formel für Gesamtsicherheit:	Arbeitsblätter „Konstruktionslehre & Maschinenelemente“ des Instituts für Maschinenelemente, Konstruktion und Fertigung an der TU Bergakademie Freiberg; S. 43, 45f
elementare Formeln:	Technisches Taschenbuch von Prof. em. Paland, Uni Hannover; Hrsg. INA-Scheffler KG Herzogenaurach, ersch. 2002 bei Stürtz AG, Würzburg; S. 119ff
Normen für Stabstahl:	Tabellenbuch Metall, Verlag Europa-Lehrmittel Haan-Gruiten, 42. Auflage 2002; S. 139f