Protokoll
- Auswertung von Versuchsergebnissen -

1. Ziele

Das Praktikum diente dazu, Grundkenntnisse der statistischen Versuchsauswertung aufzufrischen und zu vertiefen, indem statistische Schätz- und Entscheidungsmethoden auf praktische werkstofftechnologische Fragestellungen angewandt wurden.

2. Literatur

Grundlage des Versuchs ist folgender Lehrbrief:
Peisker: Anwendung mathematischer Methoden bei der Auswertung von Versuchsdaten und der Aufstellung von Prozessgleichungen auf dem Gebiet der Schwarzmetallurgie. Weiterbildungsberichte, Bergakademie Freiberg, Reihe EISENWERKSTOFFE (1979), S. 9 bis 120.
Diese Quelle wird im folgenden mit [1] referenziert.

3. Bearbeitung der Praktikumsaufgaben

3.0 Vorbereitungsaufgabe

Zur Vorbereitung auf das Praktikum war die Effektivität zweier Blastechnologien zur Erzeugung von Flüssigstahl anhand ihres Ausbringens zu vergleichen (Aufgabenstellung und Daten siehe Beiblatt E). Die Auswertung der Daten mit Hilfe der ausgegebenen Strichlisten und den darauf enthaltenen Gleichungen (Beiblätter A und B) ergibt folgende Kenngrößen der Verteilung:

Blastechnologie	**BT1**	**BT2**
Arith. Mittelwert $\bar{x}$	91,47%	93,58%
Standardabweichung s_x	1,15%	0,95%

Tabelle 1: Vergleich BT1 und BT2

Die relativen Häufigkeiten der sieben gebildeten Größenklassen der Messwerte sind auf Häufigkeitspapier (Beiblatt C) dargestellt, die Summenhäufigkeiten im Wahrscheinlichkeitsnetz (Beiblatt D). Die Auftragung auf Blatt C ist nicht ideal glockenförmig, wobei BT1 durch eine leichte Schiefe und BT2 durch einen Abfall bei Klasse m=0 auffällt. Darüber hinaus sollten bei normalverteilten Messewerten im Wahrscheinlichkeitsnetz Geraden entstehen. Dies ist hier nicht der Fall; das Abknicken der Geraden in der

Klasse m=3 ist darauf zurückzuführen, dass sich die Ausbringensrate aus technologischen Gründen nicht beliebig nahe an 100% annähern kann. Ob tatsächlich Normalverteilung vorliegt, wird am Beispiel von BT1 im Abschnitt 3.4 untersucht.

Die Ergebnisse in Tabelle 1 legen den Schluss nahe, dass, Normalverteilung vorausgesetzt, BT2 die effektivere Technologie darstellt, denn sie liefert im Mittel höhere Ausbringensraten mit größerer Zuverässigkeit. Die Frage, ob dieser Befund tatsächlich signifikant ist, soll der t-Test in Abschnitt 3.2 klären.

Die Aufgabenstellungen und Messewerte für die folgenden Aufgaben finden sich auf Beiblatt F.

3.1 Bestimmung eines notwendigen Stichprobenumfangs

Nach [1], S. 30 berechnet sich der notwendige Stichprobenumfang zu

$$n=\frac{u^2\cdot\sigma^2}{a_x^2} \quad . \tag{1}$$

Laut Tafel 7, S. 110 in [1] ist u=1,96 für S=95% und u= 3,2905 für S=99,9%. Die gegebenen Messwerte aus dem Vorversuch besitzen folgende Verteilungsgrößen (vgl. [1], S. 33 & 35):

$$\bar{x}=309{,}64\,;\; s_x=\sigma=4{,}85 \quad .$$

Für einen relativen Fehler des Mittelwertes von 1% ist a_x=3,1, für 3% ist a_x=9,3. Damit findet man nach Gleichung (1) die folgenden notwendigen Stichprobenumfänge:

	S=95%	**S=99,9%**
$\mathbf{n_{1\%}}$	9,4 -> **10**	26,5 -> **27**
$\mathbf{n_{3\%}}$	1,04 -> **2**	2,9 -> **3**

Tabelle 2: Ergebnisse 3.1

Folgerung:

Je größer die geforderte statistische Sicherheit ist, desto größer wird der notwendige Stichprobenumfang sein. Lässt man dabei größere relative Fehler des Mittelwertes zu, so sind kleinere Stichproben hinreichend. Ein Stichprobenumfang von n=10 stellt dabei sicher eine praktikable Wahl dar: der Prüfaufwand wäre nicht zu hoch, die statistische Sicherheit für übliche Belange ausreichend.

3.2 Überprüfung des Ergebnisses von 3.0 mit dem t-Test

Nach [1], Seite 46 ist der Vergleichswert für den t-Test:

$$\hat{t}=\frac{|\bar{x}_1-\bar{x}_2|}{\sqrt{\frac{s_{x_1}^2+s_{x_2}^2}{n}}}=\frac{|91{,}47-93{,}58|}{\sqrt{\frac{1{,}15^2+0{,}95^2}{50}}}\approx 10 \qquad (2)$$

Die Nullhypothese für diesen Test lautet *H₀: Gleichheit der Mittelwerte* $\bar{x}_1=\bar{x}_2$.

Für den Freiheitsgrad gilt hier $FG=n-2=50-2=48$ (Fall: Vergleich zweier Mittelwerte, siehe [1], S. 43), womit man in Tafel 11, S. 113 in [1] für eine Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha=0{,}05$ den Wert $t_{0,05\,;\,48}=2{,}02$ findet. Der t-Test lehnt die Nullhypothese ab, wenn die Bedingung $\hat{t}>t$ erfüllt ist. Da $\hat{t}\approx 10>t_{0,05\,;\,48}=2{,}02$ eine wahre Aussage ist, wird die Nullhypothese von der Gleichheit der Mittelwerte in diesem Fall abgeleht.

> ***Folgerung:***
> *Mit einer statistischen Sicherheit von 95% sind die Mittelwerte des Ausbringens der zu vergleichenden Blastechnologien voneinander verschieden. Da der Mittelwert von BT2 größer als der von BT1 ist, wäre BT2 zu wählen, sofern nicht andere Gründe dagegen sprechen.*

3.3 Ausreißertest

Ein Messewert der Reihe auf Beiblatt F, Aufgabe 3 weicht mit 0,115 um 0,049 vom Mittelwert $\bar{x}=0{,}066$ ab, weshalb er als Ausreißer verdächtigt werden könnte. Es besteht die Möglichkeit eines sytematischen Fehlers des Mittelwertes. Nun ist zu prüfen, ob dieser Messwert (bei unterschiedlichen statistischen Sicherheiten) als Ausreißer verdächtigt werden darf.

Für den Ausreißertest findet man in [1], S. 42

$$\hat{M}=\frac{x_1-x_3}{x_1-x_{n-2}} \quad \text{; für aufsteigend sortierte Messwerte.} \qquad (3)$$

Damit ergibt sich für den Vergleichswert

$$\hat{M}=\frac{0{,}115-0{,}086}{0{,}115-0{,}052}=0{,}46 \quad .$$

Dieser Wert ist mit den in Tafel 9, S.111 in [1] angebenen M-Werten zu vegleichen, wobei der Messwert ausreißerverdächtig ist, wenn $\hat{M}>M_{Tafel}$ gilt. Es ergibt sich also das in Tabelle 3 folgende:

S	α	$\hat{M}$	M_{Tafel}	Befund
90%	0.10	0.46	0.360	$\hat{M} > M_{Tafel}$
95%	0.05	"	0.406	$\hat{M} > M_{Tafel}$
99%	0.01	"	0.489	$\hat{M} < M_{Tafel}$

Tabelle 3: Ergebnisse zum Ausreißertest

Folgerung:

Mit einer statistischen Sicherheit von 90% und auch mit einer statistischen Sicherheit von 95% handelt es sich bei dem fraglichen Messwert um einen Ausreißer. Man kann jedoch nicht mit 99%iger Sicherheit davon ausgehen, dass es sich um einen Ausreißer handelt. Bei Anwendung des üblichen Vertrauensniveaus von S=95% ist der Ausreißerverdacht demnach begründet. Folglich sollte der Messwert verworfen werden.

3.4 χ²-Test – Nachweis einer Normalverteilung

Am Beispiel der BT1 aus Aufgabe 3.0 wird im Folgenden untersucht, ob es sich um eine normalverteilte Stichprobe handelt. Der χ²-Test ([1], S. 56ff) vergleicht die tatsächliche Verteilung einer Stichprobe mit einer theoretischen, hier der Normalverteilung.

Mit $\bar{x}=91{,}47\,; s_x=\sigma=1{,}15$, vgl. Beiblatt A, ergibt sich:

i	l_u	l_o	a_m	h_m	$\Phi(a_m)$	p_m	$n \cdot p_m$	$\frac{(h_m - n \cdot p_m)}{n \cdot p_m}$
	Beiblatt A		Gl. (4)	Bbl. A	Tafel 5, S. 108	Gl. (5)	n=50, s. Bbl. E	
1	88,95	89,70	-1.54	2	0.0618	0.0618	9.34	0.047
2	89,70	90,45	-0.89	8	0.1867	0.1249		
3	90,45	91,20	-0.23	12	0.4091	0.2224	11.12	0.069
4	91,20	91,95	0.42	12	0.6628	0.2537	12.69	0.038
5	91,95	92,70	1.07	8	0.8577	0.1949	9.75	0.317
6	92,70	93,45	1.72	5	0.9573	0.0996	6.67	0.265
7	93,45	94,20	2.37	3	0.9911	0.0338		
							$\Sigma=\hat{\chi}^2$	**0.733**

Tabelle 4: Zwischenergebnisse χ²-Test

$$a_m=\frac{l_o-\bar{x}}{s_x} \quad (4); \qquad p_m=\Phi(a_m)-\Phi(a_{m-1}) \quad (5);$$

Der Freiheitsgrad für diesen Fall ist nach [1], S. 58

$$FG = k^* - 1 - r = 5 - 1 - 2 = 2 \qquad (6)$$

(k*: korrigierte Klassenzahl; r=2, da zwei Parameter, Mittelwert und Standardabweichung aus der Stichprobe geschätzt worden sind)

Für die geforderte Irrtumswahrscheinlichkeit von α=0,05 und den mit (6) ermittelten Freiheitsgrad findet man in Tafel 13, Seite 114 in [1] $\chi^2_{\alpha;FG} = \chi^2_{0,05;2} = 6,0$. Die empirische Verteilung entspricht genau dann der theorethischen Verteilung, wenn die Bedingung $\hat{\chi}^2 < \chi^2_{\alpha;FG}$ erfüllt. Dies trifft im vorliegenden Fall mit $\hat{\chi}^2 = 0,733 < \chi^2_{\alpha;FG} = 6$ zu.

Folgerung:

Mit einer statistischen Sicherheit von 95% sind die Messwerte zu BT1 aus 3.0 normalverteilt. Somit war die Anwendung des t-Tests in 3.2 zulässig.